İstatistik I

9. Hafta

11 Nisan 2022

9. Kesikli Rastgele Değişken, Sürekli Ratgele Değişken, Beklenen Değer, Varyans

www.umitsarp.com

Ümit SARP, umit.sarp@ikcu.edu.tr

Giriş

- Kesikli Rastgele Değişken, Sürekli Rastgele Değişken, Beklenen Değer, Varyans
  - Kesikli Rastgele Değişken
  - Sürekli Ratgele Değişken
  - Beklenen Değer
  - Varyans

Rastgele Değişken

Değeri bir deney sonucu belirlenen değişkene rastgele değişken denir. **X** ile ifade edilir.

Eğer X rastgele değişkenin alabileceği değerlerin sayısı sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta ise X kesikli rastgele değişken denir.

X rastgele değişkenin alabileceği tüm değerler bir aralık ya da aralıklar kümesi için tanımlı ise bu değişkene sürekli rastgele değişken denir.

Kesikli Rastgele Değişken

Kesikli Rastgele Değişken;

Bir paranın iki kez atılması deneyini inceleyelim bulunan yazıların sayısı X rastgele değişkeni olsun.

Örnek Uzay;

$$S = \{TT, YY, TY, YT\}$$

X'in alabileceği değerler: $\{0, 1, 2\}$ şeklindedir.

Kesikli Rastgele Değişken

Kesikli Rastgele Değişken;

X’in x değerini alması olasılığı $f(x)$ ile gösterilir.,diğer bir gösterim şekli de $f(x) = P(X = x)$ şeklindedir.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$
$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$
$$f(2) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Kesikli Rastgele Değişken

Kesikli Rastgele Değişken fonksiyonu $f(x)$ için aşağıdakiler geçerlidir;

- $f(x) \geq 0$ tüm x'ler için
- $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$
- $P(a \leq x \leq b) = \sum_{i=a}^{b} f(x_i)$

Dağılım Fonksiyonu

Dağılım Fonksiyonu;

Bir X rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir, rastgele değişkeninin X eşit ya da daha küçük olma olasılığıdır.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x}^{b} f(x_i)$$

ile ifade edilir.

Dağılım Fonksiyonu

Dağılım Fonksiyonu $F(x)$ için aşağıdakiler geçerlidir;

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(x) = P(X \leq x)$
- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

Bir madeni para 3 kez atılıyor gelen sayıların sayısı X rastgele değişkeni ise olasılık ve dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

X=x	0	1	2	3
f(x)=P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8
F(X)	1/8	4/8	7/8	(8/8)=1

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

Kesikli bir X rastgele değişkeni için aşağıdaki olasılık fonksiyonu verilmiştir.

X=x	-2	0	1	3
f(x)=P(X=x)	c	3c	2c	4c

Buna göre;

1. c değeri kaçtır?
2. $P(x = 1)$ olasılığı kaçtır?
3. $P(0 \leq x \leq 3)$ değeri kaçtır?
4. $F(X)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz?

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

1. $\sum f(x) = 1 \Rightarrow c + 3c + 2c + 4c = 1$ olmalı $10c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10}$
2. $P(X = 1) = f(1) = 2c = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
3. $P(0 \leq x \leq 3) = f(0) + f(1) + f(3) = 9c = \frac{9}{10}$
4.

X=x	-2	0	1	3
F(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

Sürekli Ratgele Değişken

Sürekli Ratgele Değişken için aşağıdakiler geçerlidir;

X sürekli rastgele değişken olmak üzere $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu için kurallar;

- $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq x \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
- $F(x)$ dağılım foksiyonu için;

  $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Sürekli Ratgele Değişken

Örnek;

$f(x) = \frac{1}{2}, 0 < x < 2$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin.
Buna göre;

1. $P(0.5 < X < 1)$ değeri kaçtır?

2. $P(X > 1)$ değeri kaçtır?

Sürekli Ratgele Değişken

Örnek;

$f(x) = \frac{1}{2}, 0 < x < 2$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin.
Buna göre;

1. $P(0.5 < X < 1) = \int\limits_{0.5}^{1} \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} \Big|_{0.5}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

2. $P(X > 1) = 1 - \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2} dx = 1 - \frac{x}{2} \Big|_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Beklenen Değer

Beklenen Değer;

Bir rasgele değişkenin ya da rasgele değişkenin herhangi bir fonksiyonun alabileceği tüm değerlerin ortalaması beklenen değer olarak adlandırılır ve $E(x)$ ile ifade edilir.

- X kesikli rastgele değişken için $E(x) = \sum\limits_{\forall x_i} x_i \cdot f(x_i)$
- X sürekli rastgele değişken için $E(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

Beklenen Değer

Örnek;

Kesikli X rastgele değişken için olasılık fonksiyonu;

$f(x) = \frac{x}{8}, \quad x = 3, 4, 5, 6$ olsun.

Buna göre $E(X)$ beklenen değeri kaçtır?

Beklenen Değer

Örnek;

X=x	3	4	5	6
f(x)=P(X=x)	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$

$$E(x) = \sum xf(x) = 3 \times \frac{3}{18} + 4 \times \frac{4}{18} + 5 \times \frac{5}{18} + 6 \times \frac{6}{18} = \frac{86}{18} = {}^{43}/_{9}$$

Beklenen Değer

Örnek;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

Yukarıdaki X sürekli rastgele değişkeni için $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir. Buna göre $E(X)$ beklenen değeri kaçtır?

Beklenen Değer

Örnek;

$$E(x) = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Beklenen Değer

Beklenen Değer için aşağıdakiler geçerlidir;

- $E(c) = c$ (c sabit)
- $E(X + c) = E(X) + c$ (c sabit)
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ (a ve b sabit)
- $E(X^2) \neq (E(X))^2$

Beklenen Değer

Örnek;

$E(3X + 5) = 26$ olduğuna göre $E(2X)$ değeri kaçtır?

Beklenen Değer

Örnek;

$E(3X+5) = 26$ olduğuna göre $E(2X)$ değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} E(3X+5) = 3E(X) + 5 = 26 \\ \Rightarrow E(X) = 7 \\ \Rightarrow E(2X) = 2E(X) = 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

Varyans

Varyans;

Bir X rastgele değişken için beklenen değer olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bize bilgi verir. Varyans ise dağılım, değişim ya da yayılma hakkında bize bilgi verir $Var(x)$ veya σ_x^2 ile ifade edilir. $(E(X) = \mu)$

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E\left[(x-\mu)^2\right]$$

Daha genel olarak;

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

kullanılır.

Varyans

Varyans;

- $Var(aX) = a^2 Var(X)$ (a sabit)
- $Var(X + b) = Var(X)$ (b sabit)
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ (a ve b sabit)

Varyans

Örnek;

İki madeni para atıldığında gelen yazı sayısı X rastgele değişkeni olmak üzere $Var(x)$ kaçtır?

Varyans

Örnek;

İki madeni para atıldığında gelen yazı sayısı X rastgele değişkeni olmak üzere $Var(x)$ kaçtır?

X=x	0	1	2	
f(x)=P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	
xf(x)	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$1 = E(X)$
$x^2 f(x)$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{2} = E(X^2)$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

Varyans

Örnek;

$Var(2X+1)=20, \quad E(3X+2)=8$ olduğuna göre $E(2X^2+1)$ değeri kaçtır?

Varyans

Örnek;

$Var(2X+1)=20, \quad E(3X+2)=8$ olduğuna göre $E(2X^2+1)$ değeri kaçtır?

$$Var(2X+1)=2^2 Var(X)=20 \Rightarrow Var(X)=5$$

$$E(3X+2)=3E(X)+2=8 \Rightarrow E(X)=2$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]$$
$$5=E(X^2)-2^2 \Rightarrow E(X^2)=9$$

$$E(2X^2+1)=2E(X^2)+1=2\times 9+1=19$$

Ödev

1. Bir torbada 4 Sarı, 5 Yeşil, 3 Mavi top vardır. Peş peşe 3 top çekiliyor. İadesiz çekiliş şartı ile P(SYM)=?
2. Bir torbada 4 Sarı, 5 Yeşil, 3 Mavi top vardır. Peş peşe 3 top çekiliyor. İadeli çekiliş şartı ile P(YYM)=?
3. Bir iskambil destesinden rastgele bir kart çekiliyor. Kartın Kız olduğu biliniyorken maça olması ihtimali nedir?
4. Bir iskambil destesinden rastgele bir kart çekiliyor. Kartın siyah olduğu biliniyorken 4'lü olması ihtimali nedir?

10. Hafta: Kesikli Olasılık Dağılımları, Momentler, Normal Dağılım

Kaynaklar I

[1] K. Mert Çubukçu,
"Planlamada ve Coğrafyada Temel İstatistik ve Mekansal İstatistik",
Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eği. Dan. Tic. Ltd. Şti., (2015).

[2] A. Özmen, F. Er, M. Atlas, E. Şıklar,
"İstatistik (AÖF)",
Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, (2012).

[3] L. İşbilen Yücel,
"İstatistik Maliye Uzaktan Eğitim",
İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi Ders Notu.

[4] Ö. Serper,
"Uygulamalı İstatistik 1",
Bursa: Ezgi Kitapevi, (2004).

Kaynaklar II

[5] Murat Komisyon,
"İstatistik",
Murat Açıköğretim Yayınları, (2004).

[6] N. Gürsakal, A. Oğuzlar,
"Betimsel İstatistik",
Dora Yayıncılık, (2019).

[7] Y. Baykul, C. O. Güzeller,
"Sosyal Bilimler için İstatistik Uygulamaları",
Ankara: Pegem Akademi, (2014).

[8] Ankara Üniversitesi Açık Ders Sunumları,
"AKT102 İSTATİSTİK, BÖLÜM 3 OLASILIK",
https://acikders.ankara.edu.tr