İstatistik I

8. Hafta

04 Nisan 2022

8. Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları, Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı, Koşullu Olasılık, Olasılık Fonksiyonu, Dağılım Fonksiyonu

www.umitsarp.com

Ümit SARP, umit.sarp@ikcu.edu.tr

İZMİR KÂTİP ÇELEBİ ÜNİVERSİTESİ 2010

Giriş

- Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları, Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı, Koşullu Olasılık, Olasılık Fonksiyonu, Dağılım Fonksiyonu
  - Çekilişlerle ilgili bağımlılık ve bağımsızlık kavramları
  - Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı
  - Koşullu olasılık
  - Olasılık fonksiyonu
  - Dağılım fonksiyonu

Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları

Çekilişler iadeli ise denemeler bağımsızdır, iadesiz ise bağımlıdır. Top çekme deneyinde çekilen toplar yerine iade edildiğinde her çekiliş sanki ilk çekilişmiş gibi olur yani olasılıklar değişmez, eğer çekilen top yerine konmazsa her defasında top eksileceği için her çekilişte olasılıklar değişir yani olaylar bağımlı hale gelirler.

Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları

Örnek;

Bir torbada 10 tane top olsun. 3 mavi, 4 turuncu, 3 kırmızı renkte olsunlar. Peş peşe 3 top çekilsin. Bu topların iadeli ve iadesiz durumları ayrı ayrı ele alarak, MTK renkte olması ihtimallerini hesaplayınız.

Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları

Örnek;

Çözüm: Önce iadeli durumu ele alalım. İlk topun mavi olması ihtimali 3/10'dur. İkincinin turuncu olması 4/10, üçüncünün kırmızı olması 3/10'dur. Yani sorulan olasılık şöyle bulunur:

$$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{36}{1000} = 0,036$$

İadesiz durumda;

$$\frac{3}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = 0,05$$

Çekilişlerle İlgili Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları

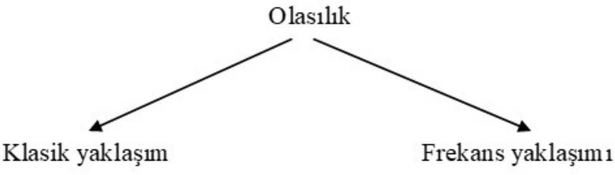
Örnek;

Uyarı!!!

Burada olasılıkları neden toplamıyoruz da çarpıyoruz sizce?

Bunun sebebi, olayın ancak peş peşe 3 top çektikten sonra tamamlanmasıdır. Tıpkı bir şehirden bir başka şehre aktarmalı olarak giderken kullanabileceğimiz ulaşım araçları sayısını çarpmamız gibi. Toplama yapmak için olayların her basamağının birbirinden ayrı ve tamamlanmış olması yani ayrık olması gerekir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı



Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Klasik yaklaşım;

Bir örneklem uzayında n tane mümkün sonuç olsun. A olayı S örneklem uzayının bir alt kümesi olmak üzere, A'nın k tane elemanı olsun. Bu durumda klasik yaklaşıma göre P(A)=k/n'dir.

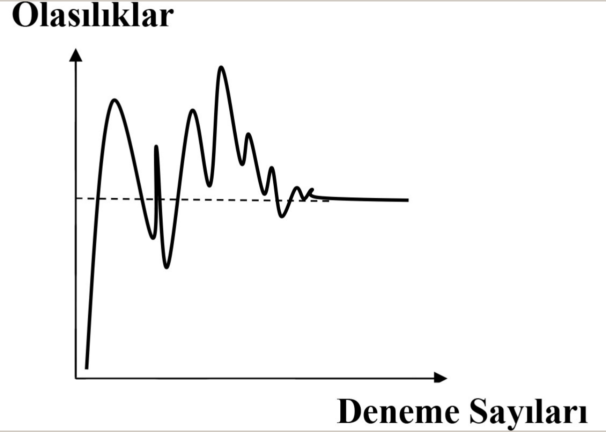
Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;

Bir paranın Yazı gelme olasılığı bilindiği üzere %50'dir. Ancak, diyelim ki bir parayı 10 defa atsak 5 defa Yazı 5 defa Tura gelecek diye bir zorunluluk yoktur. Onu da yazı veya dokuzu tura biri yazı, v.b. çok farklı sayıda örneklemler ortaya çıkabilir. Fakat, deneme sayısı arttığında yani 500 defa, 1000 defa, 10000 defa atış yapılsa, olasılık bir noktadan sonra stabil hale gelir ve bu noktada olasılık, klasik yaklaşımın öngördüğü 0.5'tir. Bu durum aşağıdaki şekilde anlatılmak istenmiştir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;



Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;

***n=10 defa atış sonucunda şu sonuçlar elde edilmiş olsun:

TTYYYYYTYY

Bu örneklemde P(Yazı)=7/10, P(Tura)=3/10'dur.

Bir başka örneklem şöyle olsun:

YYYYTYYYYT

Bu örneklemde P(Yazı)=8/10, P(Tura)=2/10'dur.

TTYTTTTTTT

Bu örneklemde P(Yazı)=1/10, P(Tura)=9/10'dur.

n=1000 defa olsun,

Örneğin P(Yazı)=468/1000, P(Tura)=532/1000'dir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;

Bir başka örneklem şöyle olsun:

YYYYTYYYYT

Bu örneklemde P(Yazı)=8/10, P(Tura)=2/10'dur.

TTYTTTTTTT

Bu örneklemde P(Yazı)=1/10, P(Tura)=9/10'dur.

n=1000 defa olsun,

Örneğin P(Yazı)=468/1000, P(Tura)=532/1000'dir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;

Halen klasik yaklaşımın öngördüğü olasılığa ulaşılamadığına göre, deneme sayısı daha da arttırılmalıdır.

Söz gelimi n=5000 olsa, P(Yazı)=2500/5000, P(Tura)=2500/5000 olacaktır. (Tabii kesin bir durum değil, belki de olasılığın stabil (durağan) hale gelmesi 10000 defa deneme gerektirebilir)

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Frekans yaklaşımı;

Bazen de, bir olayın mümkün sonuçları eşit olasılığa sahip olmayabilir. Mesela atılan zar hileli ise ve çoğunlukla “2” geliyorsa, bu durumda zarın üst yüzüne gelen sayıların olasılıklarını belirlemek için çok sayıda deneme yapmak gerekir. Örneğin hileli bir para düşünelim, bu durumda P(Y)=P(T)=0.5 olması beklenemez. İşte böyle durumlarda;

P(A)=(n denemede A'nın ortaya çıkma sayısı)/n ‘dir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Örnek;

Hileli bir para 1000 kez atılıyor. Sonuçlar kaydediliyor. 320 defa Tura, 680 defa Yazı geliyor. Bu durumda P(Yazı)=0.68, P(Tura)=0.32'dir.

Olasılığın Klasik ve Frekans Tanımı

Örnek;

Bir paranın 3 kez atılması deneyinde B olayı; en az bir kez Tura gelmesi olsun. P(B)=?

n(S)=$2^3 = 8$ olası sonuç vardır.

S=YYY,YYT,YTY,TYY,TTY,TYT,YTT,TTT

P(B)=7/8'dir. Çünkü bahsedilen durumu sağlayan 7 sonuç vardır.

C olayı en fazla 2 Yazı gelme olayı ise P(C)=?

Yani 0,1 ya da 2 yazı gelmesi demektir.

S=YYY,YYT,YTY,TYY,TTY,TYT,YTT,TTT

P(C)=7/8'dir.

Koşullu Olasılık

Koşullu Olasılık;

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

Yukarıdaki koşullu olasılığın sözel ifadesi şudur; B olayının gerçekleştiği biliniyorken, A olayının meydana gelme olasılığı. Sağ tarafta kalan olay, koşulu yaratan olaydır. Şayet A ile B olayları bağımsız iseler bu defa koşullu olasılık;

Koşullu Olasılık

Koşullu Olasılık;

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A\right)\times P\left(B\right)}{P\left(B\right)} \text{ olur,}$$

$P(B)$'ler birbirini götürür ve; $P\left(A/B\right)=P\left(A\right)$ olur.

Koşullu Olasılık

Örnek;

A ve B iki tedavi yöntemidir. Tedavilerin kilolarına göre tasnif edilmiş insanlardaki başarı olasılıkları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

	Zayıf	Normal	Kilolu	Obez	Toplam
A	$0,05$	$0,10$	$0,15$	$0,05$	$0,35$
B	$0,05$	$0,20$	$0,25$	$0,15$	$0,65$
$Toplam$	$0,10$	$0,30$	$0,40$	$0,20$	$1,00$

Koşullu Olasılık

Örnek;

- A yöntemiyle başarı olasılığı nedir?

$$P(A) = 0,35$$

- B yöntemiyle başarı olasılığı nedir?

$$P(B) = 0,65$$

Koşullu Olasılık

Örnek;

- Seçilen bir kişinin kilolu olduğu biliniyorken, A yöntemiyle tedavi olma olasılığı nedir?

$$P(A\,/\,kilolu) = P(A\,\cap\,kilolu)\,/\,P(kilolu) = 0.15/0.4 = 0.375$$

- Seçilen bir kişinin zayıf olduğu biliniyorken B yöntemiyle tedavi olma olasılığı nedir?

$$P(B\,/\,\text{zayıf}) = P(B\,\cap\,\text{zayıf})\,/\,P(\text{zayıf}) = 0.05/0.10 = 0.5$$

Koşullu Olasılık

Örnek;

- A yöntemiyle tedavi olduğu biliniyorken bu kişinin obez olma olasılığı?

$$P(obez/A) = P(obez \cap A)/P(A) = 0.05/0.35 = 0.143$$

- $P(normal\,/B) = P(normal \cap B)\,/P(B) = 0.2/0.65 = 0.308$

Koşullu Olasılık

Örnek;

- $P(A\,/\,\text{zayıf}) = P(A \cap \text{zayıf})\,/\,P(\text{zayıf}) = 0.05/0.10 = 0.5$
- $P(B\,/\,normal) = P(B \cap normal)\,/\,P(normal) = 0.20/0.30 = 0.667$

Koşullu Olasılık

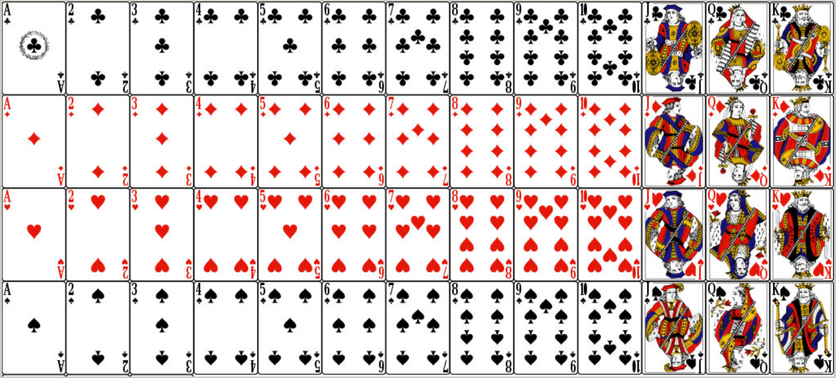
Örnek;

52’lik desteden rastgele bir kart çekiliyor.

Bu kartın kırmızı olduğu biliniyorsa As olması ihtimali nedir?
Çözüm:
“A: kırmızı olması”, “B:As olması” şeklinde tanımlanıyor, buna göre P(B/A) olasılığı soruluyor.

Koşullu Olasılık

Örnek;



Koşullu Olasılık

Örnek;

Toplam 52 kart vardır.

4 gruptan oluşur; sinek ve maça (siyah renkliler), kupa ve karo (kırmızı renkliler) A harfiyle gösterilen kağıdın özel adı “As” tır.

Her gurupta birer tane bulunur, 1 yerine geçer. Her grupta toplam 13 kağıt vardır.

J: Vale (11 demektir), Q: Kız (12 demektir), K: Papaz (13 demektir).

Yukarıdaki şekilde yukarıdan aşağı doğru gruplar karo, sinek, kupa ve maçadır.

Koşullu Olasılık

Örnek;

Örneğimize dönersek;

$$P(A) = 26/52$$
$$P(B) = 4/52$$
$$P(A \cap B) = 2/52$$

O halde $P(A/B) = \frac{2/52}{26/52} = 2/26$

Uyarı!!! Burada A ile B'nin kesişimini niçin 2/26 değil de 2/52 aldık? Çünkü B olayı As olması şeklinde tanımlanmıştır. Dolayısıyla sadece kırmızı asların bulunduğu grubu esas alamayız, sinek ve maça asları da as olduğuna göre destenin tümünü esas almalıyız.

Koşullu Olasılık

Örnek;

- P(Karo/sekiz)=?

  Çözüm: (1/52)/(4/52)=0,25

- maça veya papaz?

Çözüm: P(maça $\cup papaz) = P(maa) + P(papaz) - (maa \cap papaz) = (13/52) + (4/52) - (1/52)$

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Benzer koşullar altında yinelendiğinde değişik sonuçlar alınabilen deneylere, tesadüfi deneyler (rastlantısal deneyler "rd") denilmektedir.

Kesikli bir rd nin olasılık dağılımına olasılık fonksiyonu denir.

X'in alabileceği değerlerin bu değerleri alma olasılıklarıyla birlikte yazılmış haline olasılık fonksiyonu denir.

Herhangi bir fonksiyonun kesikli rd için olasılık fonksiyonu olabilmesi için örneklem uzayındaki tüm birimlerin olasılıklarının [0,1] aralığında olması ve tüm olasılıkların toplamının 1'e eşit olması gerekmektedir.

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Örnek;

Bir olayın aşağıda gösterildiği gibi 4 mümkün sonucu olsun. X rd kesikli olduğuna göre, P(e4)=?

P(e1)=0.3

P(e2)=0.4

P(e3)=0.2

Çözüm: P(e4)=1-(0.3+0.4+0.2)=0.1

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Örnek;

İki zar atılması deneyinde X rd. Üste gelen yüzlerin çarpımı şeklinde tanımlı olsun. X rd'nin olasılık fonksiyonunu yazınız.

Öncelikle S örneklem uzayını oluşturup X rd nin aldığı değerleri bulacağız. Sonra bu değerleri alması olasılıklarını bularak, iki sütun haline, solda x değerleri sağda ise P(x)'ler olmak üzere X rd'nin olasılık fonksiyonunu yazacağız

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Örnek;

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Örnek;

x	P(X=x)
1	1/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	2/36
6	4/36
8	2/36
9	1/36
10	2/36
12	4/36
15	2/36
16	1/36
18	2/36
20	2/36
24	2/36
25	1/36
30	2/36
36	1/36

Kesikli Rd'nin Olasılık Fonksiyonu

Örnek;

X ‘in olasılık fonksiyonu bu şekildedir, solda x değerleri, sağda da bu değerleri hangi olasılıklarla almakta olduğunu yazdığımızda X'in olasılık fonksiyonunu yazmış oluruz.

Ancak burada bir sağlama yapalım, olasılık fonksiyonu olma şartlarından biri, her bir olasılığın [0,1] arasında olmasıydı, baktığımızda bu koşulun sağlandığını görüyoruz.

Peki $\sum P(x) = 1$ mi? Evet, toplam olasılık 1'e eşittir, o halde yaptığımız işlem doğrudur.

Dağılım Fonksiyonu

Dağılım Fonksiyonu;

X rd'nin dağılım fonksiyonu F(X) ile gösterilir. X rd nin x'e eşit veya daha küçük olması olasılığıdır. Bu birikimli olasılığa dağılım fonksiyonu denir.

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

Hilesiz bir zar atılsın. X rd üste gelen sayılar olsun. F(X)'i yazınız.

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

Hilesiz bir zar atılsın. X rd üste gelen sayılar olsun. F(X)'i yazınız.

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

Dağılım fonksiyonu, olasılık fonksiyonunun birikimli halidir, o nedenle öncelikle f(x)'i oluşturmalıyız. S=1,2,3,4,5,6

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x_i < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x_i < 2 \\ 2/6 & 2 \leq x_i < 3 \\ 3/6 & 3 \leq x_i < 4 \\ 4/6 & 4 \leq x_i < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x_i < 6 \\ 1 & 6 \leq x_i \end{cases}$$

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

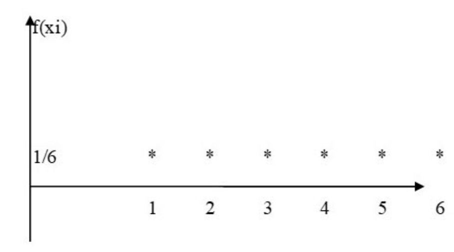


Figure: Olasılık Fonksiyonunun Grafiği

Dağılım Fonksiyonu

Örnek;

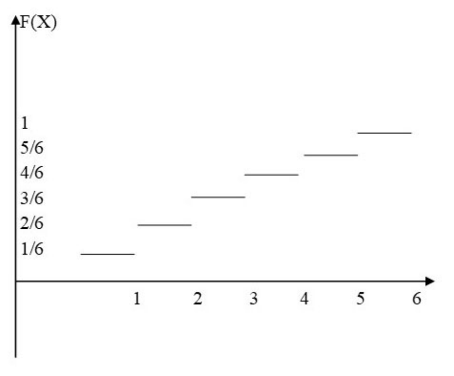


Figure: Dağılım Fonksiyonunun Grafiği

9. Hafta: İstatiksel Dağılımlar.

Kaynaklar I

[1] K. Mert Çubukçu,
"Planlamada ve Coğrafyada Temel İstatistik ve Mekansal İstatistik",
Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eği. Dan. Tic. Ltd. Şti., (2015).

[2] A. Özmen, F. Er, M. Atlas, E. Şıklar,
"İstatistik (AÖF)",
Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, (2012).

[3] L. İşbilen Yücel,
"İstatistik Maliye Uzaktan Eğitim",
İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi Ders Notu.

[4] Ö. Serper,
"Uygulamalı İstatistik 1",
Bursa: Ezgi Kitapevi, (2004).

Kaynaklar II

[5] Murat Komisyon,
"İstatistik",
Murat Açıköğretim Yayınları, (2004).

[6] N. Gürsakal, A. Oğuzlar,
"Betimsel İstatistik",
Dora Yayıncılık, (2019).

[7] Y. Baykul, C. O. Güzeller,
"Sosyal Bilimler için İstatistik Uygulamaları",
Ankara: Pegem Akademi, (2014).

[8] Ankara Üniversitesi Açık Ders Sunumları,
"AKT102 İSTATİSTİK, BÖLÜM 3 OLASILIK",
https://acikders.ankara.edu.tr