İstatistik I

5. Hafta

14 Mart 2022

5. Temel Olasılık Kavramları

www.umitsarp.com

Ümit SARP, umit.sarp@ikcu.edu.tr

Giriş

- Temel Olasılık Kavramları
  - Olasılık
  - Permütasyon
  - Kombinasyon

Temel Olasılık Kavramları

Olasılık Deneyi;

Olasılık deneyi, belirli sonuçların (sayım, ölçüm veya yanıt) elde edildiği bir eylemdir, P("olay") ile gösterilir [8].

Bir olasılık deneyinde tek bir denemenin neticesi sonuçtur.

Örneğin; Bir zar atılması sonucu gelen sayıyı gözlemlemek bir olasılık deneyidir.

Temel Olasılık Kavramları

Örneklem Uzayı;

Bir deney için olası tüm sonuçların kümesi örneklem uzayıdır [8].

Örneğin; Bir zar atıldığında örneklem uzayı 6 sonuçtan oluşur.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Temel Olasılık Kavramları

Olay;

Bir veya daha fazla sonuçtan oluşur ve örneklem uzayının bir alt kümesidir [8].

Örneğin; Bir zar atılsın. "A" olayı çift sayı gelmesi olsun.

Temel Olasılık Kavramları

Basit Olay;

Tek bir sonuçtan oluşan olaydır [8].

Örneğin; Paranın yazı gelmesi.

Bir başka örnekle açıklarsak; Bir zar atılsın ve A olayı çift sayı gelmesi durumlarını temsil etsin. Bu basit olay değildir çünkü A olayının sonuçları $\{2, 4, 6\}$ dır yani tek bir sonuçtan oluşmaz.

Temel Olasılık Kavramları

Klasik (veya teorik) olasılık;

Bir örneklem uzayındaki her bir sonucun eşit olasılıkla ortaya çıkması durumlarında kullanılır. E olayı için klasik olasılık [8].

$$P(E) = \frac{\text{Olaydaki sonuç sayısı}}{\text{Örneklem uzayındaki sonuçların sayısı}}$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir zar atılsın ve A olayı 5 gelme durumu ise A olayının olasılığını bulalım.

A olayı $\{5\}$ 'dir. Yani tek bir durum var. Olaydaki sonuç sayısı 1'dir.

Örneklem uzayındaki sonuçların sayısı, tüm ihtimallerdir. Yani 6'dır.

$$P(A) = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir zar atılsın, üst yüze gelen sayıların;

1. Asal olma olasılığı?
2. Tek olma olasılığı?
3. 7'den büyük olma olasılığı?
4. Sayı olma olasılığı?

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir zar atılsın, üst yüze gelen sayıların;

1. Asal olma olasılığı? $\{2, 3, 5\} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2. Tek olma olasılığı? $\{1, 3, 5\} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3. 7'den büyük olma olasılığı? $\{\} \rightarrow \frac{0}{6} = 0$
4. Sayı olma olasılığı? $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \frac{6}{6} = 1$

Temel Olasılık Kavramları

Ampirik (veya istatistiksel) olasılık;

Olasılık deneylerinden elde edilen gözlemlere dayanır. E olayının ampirik frekansı, E olayının göreceli frekansıdır [8].

$$P(E) = \frac{\text{E olayının frekansı}}{\text{Toplam frekans}}$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir seyahat acentesi yaptığı her 50 rezervasyonda 12'sinin gemi seyahati olacağını belirler. Yapacağı bir sonraki rezervasyonun gemi seyahati olma olasılığı nedir?

$$P(gemi) = \frac{12}{50} \approx 0.24$$

Temel Olasılık Kavramları

Büyük Sayılar Kanunu;

Bir deney tekrar tekrar tekrarlanırken, bir olayın istatistiksel olasılığı olayın teorik (gerçek) olasılığına yaklaşır [8].

Örneğin; Ulviye 20 kez yazı tura atsın ve 3 tura sonucuna ulaşsın.

Bu durumda istatistiksel olasılık $\frac{3}{20}$ olur.

Bu, $\frac{1}{2}$ olan teorik olasılığı temsil etmemektedir.

Ulviye'nin bozuk parayı atma sayısı arttıkça, büyük sayılar yasası, istatistiksel olasılığın teorik olasılığa daha da yaklaşacağını gösterir.

Temel Olasılık Kavramları

Frekans Dağılımlarının Olasılıkları;

Frekans dağılımlarının toplam gözlem sayısına bölünmesi ile bulunur.

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Aşağıdaki sıklık dağılımı, bir istatistik sınıfındaki 30 öğrencinin yaşını temsil eder. Bir öğrencinin 26 - 33 yaşları arasında olma olasılığı nedir?

yaş aralıkları	sıklık (f_i)
$18 - 25$	13
$26 - 33$	8
$34 - 41$	4
$42 - 49$	3
$50 - 57$	2

$$P(26 - 33) = \frac{8}{30} \approx 0.267$$

Temel Olasılık Kavramları

Öznel Olasılık;

Sezgiden, bilgiye dayalı tahminlerden oluşan olasılık türüdür [8].

Örneğin; Bir iş analisti, greve giden belirli bir birliğin olasılığının 0.15 olduğunu tahmin ediyor.

Bir örnekte siz verebilir misiniz?

Temel Olasılık Kavramları

Olasılık Aralığı Kuralı;

A olayının olasılığı 0 ile 1 arasındadır.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Olasılık 0 olduğunda neyi ifade etmektedir?
- Olasılık 1 olduğunda neyi ifade etmektedir?
- Olasılık 0.5 olduğunda neyi ifade etmektedir?

Temel Olasılık Kavramları

- Olasılık 0 olduğunda neyi ifade etmektedir? İmkansız Olay
- Olasılık 1 olduğunda neyi ifade etmektedir? Kesin Olay
- Olasılık 0.5 olduğunda neyi ifade etmektedir? yarı yarıya, 50-50.

Temel Olasılık Kavramları

Tümleyen Olaylar;

A olayının tümleyeni, A olayına dahil edilmeyen örneklem uzayındaki tüm sonuçların kümesidir (A' ile gösterilir).

$$P(A) + P(A') = 1$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir sepetin içinde 5 kırmızı pul, 4 mavi pul ve 6 beyaz pul olsun. Rasgele seçilen bir pulun mavi olmaması olasılığını bulun.

$$P\,(\text{mavi pul seçilmesi}) = \frac{4}{15} \approx 0.267$$

$$P\,(\text{mavi olmayan pul seçilmesi}) = 1 - \frac{4}{15} \approx 0.733$$

Temel Olasılık Kavramları

Koşullu Olasılık;

Koşullu olasılık, başka bir olayın gerçekleşmiş olması koşuluyla, meydana gelen bir olayın olasılığıdır.

P(A| B) $\rightarrow$ A verildiğinde B nin olması olasılığı

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir sepetin içinde 5 kırmızı pul, 4 mavi pul ve 6 beyaz pul vardır. İki pul rasgele seçilir. İlk pulun mavi olduğu göz önüne alındığında, ikinci pulun kırmızı olma olasılığını bulun. (İlk pulun yerine konmadığını varsayalım.)

İlk pul seçildiğinden ve yerine konmadığından, yalnızca 14 pul kalır.

$$P\,(\text{seçilenin kırmızı olması} \mid \text{ilk pul mavi}) = \frac{5}{14} \approx 0.357$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

100 adet üniversite öğrencisine anket uygulanmış ve haftada kaç saat ders çalıştıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki tablodadır. Bir erkek öğrencinin 10 saatten fazla ders çalışması olasılığını bulalım?

	<5	5 -10	>10	Toplam
Erkek	11	22	16	49
Kadın	13	24	14	51
Toplam	24	46	30	100

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

	<5	5 -10	>10	Toplam
Erkek	11	22	16	49
Kadın	13	24	14	51
Toplam	24	46	30	100

Örneklem uzayı 49 erkek öğrenciden oluşmaktadır. Bunlardan 16'sı haftada 10 saatten fazla çalışarak geçiriyor.

$$P\,(\text{10 saatten fazla çalışma} \mid \text{erkek}) = \frac{16}{49} \approx 0.327$$

Temel Olasılık Kavramları

Bağımsız Olaylar;

Olaylardan birinin gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşme olasılığını etkilemezse, iki olay bağımsızdır. İki olay A ve B bağımsız ise;

P(B | $A) = P(B)$ veya $P(A \mid B) = P(A)$

Olaylar bağımsız değillerse bağımlı olaylardır.

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Olayların bağımsız mı yoksa bağımlı mı olduğuna karar verin. Standart bir kart destesinden bir karo (A) seçilsin ve desteye geri konulsun ve desteden bir maça (B) seçilsin. Bu durumda:

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25$$

A'nın meydana gelmesi B'nin olasılığını etkilemez, bu nedenle olaylar bağımsızdır.

Temel Olasılık Kavramları

Çarpma Kuralı;

A ve B iki olayın gerçekleşmesi olasılığı:

$$P(A\ ve\ B) = P(A)P(B \mid A)$$

Eğer A ve B bağımsız ise, bu kural:

$$P(A\ ve\ B) = P(A)P(B)$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

İki kart yerine konmadan desteden seçilsin. Bir karo ve bir maça seçme olasılığını bulalım?

Kartlar yerine konmadan çekildiği için bağımlı olaylardır.

$$P(\text{karo ve maça}) = P(\text{karo})P(\text{maça} \mid \text{karo}) = \frac{13}{52}\frac{13}{51} = \frac{169}{2652} \approx 0.064$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir zar ve iki para atılsın. Zarın 5 , paraların yazı gelmesi olasılığını bulalım.

$$P(\text{zarın 5 gelmesi}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{yazı}) = \frac{1}{2}$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

$$P(\text{zarın 5 gelmesi}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{yazı}) = \frac{1}{2}$$

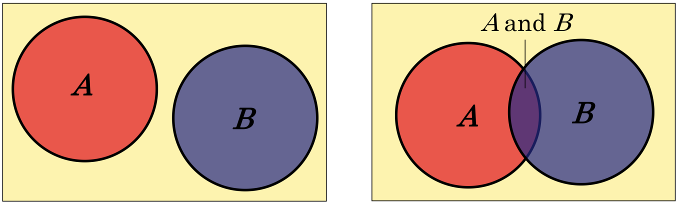
Zar 5 gelse de gelmese de paranın yazı gelmesi olasılığı $\frac{1}{2}$ bu nedenle olaylar birbirinden bağımsızdır.

$$P(\text{5 ve yazı ve yazı}) = P(5)P(\text{yazı})P(\text{yazı}) = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \approx 0.042$$

Temel Olasılık Kavramları

Ayrık Olaylar;

İki olay, A ve B, aynı anda gerçekleşemezlerse ayrık olaylardır.



A ve B ayrık olaylar

A *ve* B ayrık olay değil.

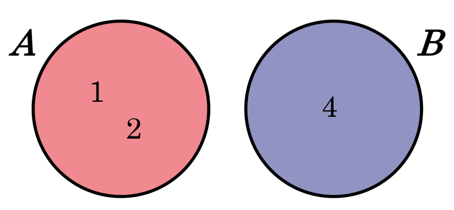
Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

İki olayın ayrık olup olmadığını bulalım?

A olayı,: Zar atıldığında 3 ten daha az gelmesi.

B olayı: Zar atıldığında 4 gelmesi.



Bu olaylar aynı anda olamazlar bu nedenle ayrık olaylardır.

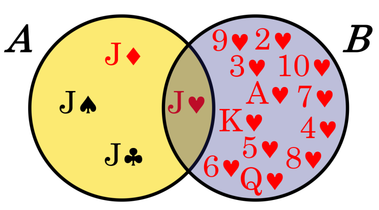
Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

İki olayın ayrık olup olmadığını bulalım?

A olayı: Kart destesinden J gelmesi .

B olayı: Kart destesinden kupa gelmesi .



Kart aynı anda hem bir J hem de bir kupa olabileceğinden, ayrık olaylar değildir.

Temel Olasılık Kavramları

Toplama Kuralı;

A ya da B olayının meydana gelme olasılığı;

$$P(A \text{ ya da } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ve } B)$$

Eğer A ve B olayları ayrık olaylarsa bu kural basitçe:

$$P(A \text{ ya da } B) = P(A) + P(B)$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Zar atıldığında 3 ten az ya da 4 gelme olasılığı ne olur?

Olaylar ayrık olaylardır.

$$P(\text{3'den az ya da 4 gelme}) = P(\text{3'den az }) + P(4) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir kart destesinden rasgele bir kart seçilsin. Kartın bir J veya kupa olma olasılığını bulalım?

Olaylar birbirinden ayrık değil çünkü kupa J her iki olayda da meydana gelir.

$$\begin{aligned} P(\text{ J ya da kupa}) &= P(\text{J}) + P(\text{kupa}) - P(\text{kupa olan J}) \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \\ &= \frac{16}{52} \approx 0.308 \end{aligned}$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

100 üniversite öğrencisine anket uygulanmış ve haftada kaç saat ders çalıştıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki tablodadır. Bir öğrencinin 5 ile 10 saat veya 10 saatten fazla çalışması olasılığını bulalım?

	<5	5 - 10	>10	Toplam
Erkek	11	22	16	49
Kadın	13	24	14	51
Toplam	24	46	30	100

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Olaylar ayrık olaylardır.

$$\begin{aligned} P(\text{5 ile 10 saat ya da 10 saatten fazla}) &= P((\text{5 - 10}) + P(10) \\ &= \frac{46}{100} + \frac{30}{100} \\ &= \frac{76}{100} \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

Temel Olasılık Kavramları

Temel Sayma İlkeleri;

Birinci olay m şekilde ve ikinci olay n şekilde meydana geliyorsa, iki olayın sırayla gerçekleşebileceği yol sayısı $m \times n$'dir.

Bu kural, meydana gelen herhangi bir sayıda olay için genişletilebilir.

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir menü; ana yemek, garnitür ve tatlıdan oluşmaktadır. 4 ana yemek, 2 garnitür ve 5 tatlı mevcutsa kaç farklı yemek seçilebilir?

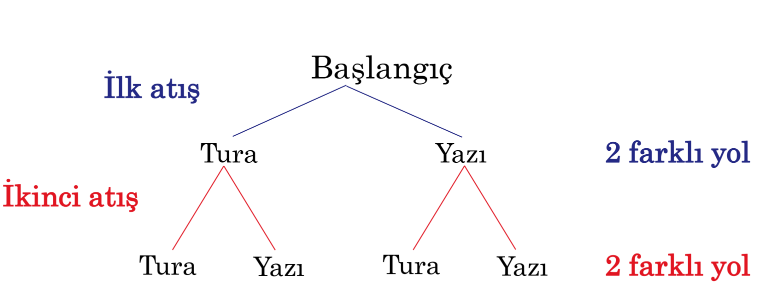
$$\underset{\boxed{\text{ana yemek sayısı}}}{\mathbf{4}} \times \underset{\boxed{\text{Garnitür sayısı}}}{\mathbf{2}} \times \underset{\boxed{\text{tatlı sayısı}}}{\mathbf{5}} = \mathbf{40}$$

40 farklı yemek seçilebilir.

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir para iki kez atılsın. Örneklem uzayını listeleyelim?



$2 \times 2 = 4$ farklı sonuç:$\{$YY, YT, TY, TT$\}$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Bir evin güvenlik sistemine erişim kodu 5 haneden oluşur. Her basamak 0 - 9 arasında olabilir.

1. Her hane tekrar edilen sayı varsa kaç farklı kod yazılabilir?
2. Her rakam yalnızca bir kez kullanılırsa ve tekrarlanmazsa kaç farklı kod yazılabilir?

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

1. H er basamak tekrar edilebildiğinden, 5 basamaktan her biri için 10 seçenek vardır.

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100,000 \text{ farklı kod}$$

2. Her hane tekrar edilemediğinden, ilk hane için 10 seçenek, ikinci hane için 9 seçenek, üçüncü için 8, dördüncü için 7 ve beşinci için 6 seçenek vardır.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30,240 \text{ farklı kod}$$

Temel Olasılık Kavramları

n faktöriyel;

1'den n'e kadar olan sayıların çarpımına faktöriyel $n!$ denir.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Temel Olasılık Kavramları

Permütasyon;

Bir permütasyon, nesnelerin sıralanmış bir düzenidir. n farklı nesnelerin farklı permütasyonlarının sayısı $n!$ dir.

Örnek;

Bir ankette 7 soru varsa, olası tüm soru düzenlemelerini karşılamak için kaç farklı ankete ihtiyaç vardır?

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \ anket$$

Temel Olasılık Kavramları

n elemanın r tane Permütasyonu;

n elemanın r tane permütasyon sayısı;

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Grup sayısı

Gruptan seçim sayısı

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

8 listeden 5 kitap okumak için gereklidir. Ne kadar farklı sıralama yapabilirsiniz?

$$_nP_r = {}_8P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6720 \ \textit{yol}$$

Temel Olasılık Kavramları

Ayırt Edici Permütasyonlar;

n_1'in bir tür, n_2'nin başka bir tür olduğu n nesnelerinin ayırt edilebilir permütasyonu:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Jessie ön bahçesine10 tane bitki dikmek istiyor.3 adet gül, 4 nergis ve 3 adet zambak var. Bitkiler kaç farklı şekilde düzenlenebilir?

$$\frac{10!}{3!4!3!} = 4,200 \text{ farklı yolla sıralanabilir}$$

Temel Olasılık Kavramları

n Elemanın r tane Kombinasyonu;

Kombinasyon, sıralamanın önemli olmadığında n gruptan r nesnenin seçilmesidir. n gruptan seçilen r nesnesi kombinasyonlarının sayısı;

grup sayı

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

Gruptan seçilen sayı

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

8 tane kitap listesinden 5 kitap okumak için sıralama önemli değilse kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

$$ {}_nC_r = {}_8C_5 = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = 56 \text{ kombinasyon vardır} $$

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

Piyangoda, büyük ödülü kazanmak için 44 üzerinden 6 sayıyı (herhangi bir sıra ile) doğru seçmelisiniz.

1. 44 sayıdan 6 sayı kaç şekilde seçilebilir?
2. Piyango bileti alırsanız, büyük ödülü kazanma olasılığınız nedir?

Temel Olasılık Kavramları

Örnek;

1. Cevabı bulmak için kombinasyon formülü kullanılır.

$$ {}_{44}C_6 = \frac{44!}{(44-6)!6!} = \frac{44!}{38!6!} = 7,059,052 \text{ kombinasyon} $$

2. Sadece bir kazanan bilet olduğundan;

$$ P(kazanan) = \frac{1}{7059052} \approx 0.00000014 $$

Ödev

1. BURSA kelimesinin harfleri kullanılarak 2 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?
2. OLASILIK kelimesinin harflerinin her düzende kullanılması koşulu ile 8 harfli kaç farklı kelime elde edebiliriz?
3. 8 kişilik bir ögrenci grubundan 4 kişilik gruplar seçilerek yanyana fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre kaç farklı poz fotoğraf çekilebileceğini bulunuz?
4. Aralarında iki kardeşin de bulunduğu 20 kişi arasından 5 kişi seçilecektir. Bu iki kişinin birlikte bulundugu kaç farklı seçim yapılabilir?
5. Her soru için c seçenekli çoktan seçmeli bir testin olduğunu varsayalım. Bu testte bir soruyu cevaplarken, cevabı bilme olasılığınız p'dir. Cevabı bilmiyorsanız rastgele birini seçersiniz. Doğru cevaplamış olduğunuza göre, bir sorunun cevabını bilme olasılığınız nedir?

6. Hafta: Permütasyon ve Kombinasyon örneklerine devam ediyoruz.

Kaynaklar I

[1] K. Mert Çubukçu,
"Planlamada ve Coğrafyada Temel İstatistik ve Mekansal İstatistik",
Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eği. Dan. Tic. Ltd. Şti., (2015).

[2] A. Özmen, F. Er, M. Atlas, E. Şıklar,
"İstatistik (AÖF)",
Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, (2012).

[3] L. İşbilen Yücel,
"İstatistik Maliye Uzaktan Eğitim",
İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi Ders Notu.

[4] Ö. Serper,
"Uygulamalı İstatistik 1",
Bursa: Ezgi Kitapevi, (2004).

Kaynaklar II

[5] Murat Komisyon,
"İstatistik",
Murat Açıköğretim Yayınları, (2004).

[6] N. Gürsakal, A. Oğuzlar,
"Betimsel İstatistik",
Dora Yayıncılık, (2019).

[7] Y. Baykul, C. O. Güzeller,
"Sosyal Bilimler için İstatistik Uygulamaları",
Ankara: Pegem Akademi, (2014).

[8] Ankara Üniversitesi Açık Ders Sunumları,
"AKT102 İSTATİSTİK, BÖLÜM 3 OLASILIK",
https://acikders.ankara.edu.tr