İstatistik I

10. Hafta

18 Nisan 2022

10. Bazı Kesikli Dağılımlar

www.umitsarp.com

Ümit SARP, umit.sarp@ikcu.edu.tr

Giriş

- Bazı Kesikli Dağılımlar
  - Bernoulli Dağılımı
  - Binom Dağılımı
  - Poisson Dağılımı
  - Geometrik Dağılım

Bernoulli Dağılımı

Bernoulli Dağılımı;

Bir deneyde başarı ve başarısızlık diye nitelendirilen iki sonuçla ilgilenildiğinde bu deneye (iki sonuçlu) Bernoulli deneyi ya da Bernoulli denemesi denir.

başarı olasılığı $\rightarrow p, \quad (0 < p < 1)$

başarısızlık olasılığı $\rightarrow 1 - p = q$

başarı-başarısız/ sağlam-bozuk/ olumlu-olumsuz/ ölü-canlı

Bernoulli dağılımının olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

şeklinde verilir.

Bernoulli Dağılımı

Bernoulli dağılımın beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir;

- $E(X) = \sum_x xf(x) = 0\,(1-p) + 1p = p$
- $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 0^2\,(1-p) + 1^2 p = p$
- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Binom Dağılımı

Binom Dağılımı;

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında (bağımsız olarak) n kez tekrarlanması ile oluşan deneye binom deneyi denir.

Binom deneyinin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- Deney süresince örneklemde denek sayısı ya da deneme sayısı değişmez olmalıdır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Her denemede iki olası sonuç vardır (istenen ve istenmeyen olay).
- Her denemede ilgilenilen olay olasılığı p değişmezdir. Dolayısıyla istenmeyen olay olasılığı $q = 1 - p$'de değişmezdir.

Binom Dağılımı

Binom Dağılımı

Binom dağılımı kesikli bir olasılık dağılımıdır. X rasgele değişkeni binom dağılımına sahip olduğunda $X \sim b(n, p)$ ile gösterilir.

Binom dağılımının olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n$$

şeklinde verilir.

Binom Dağılımı

Binom dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir;

- $\mu = E(X) = np$
- $\sigma^2 = Var(X) = npq$

Binom Dağılımı

Örnek;

Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Bu kutudan yerine koyarak 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

Binom Dağılımı

Örnek;

Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Bu kutudan yerine koyarak 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

X : Çekilen tabletin aspirin olması

$X \sim b(n = 3, p = \frac{1}{2})$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.375$$

Binom Dağılımı

Örnek;

İlaç üreten bir firma ürettiği ilaçları ambalajlayarak satışa sunmaktadır. Ambalajlanan ilaç paketlerinin %10'unun istenen standarda uymadığı bilinmektedir. Bu ambalajlanmış ilaç paketlerinden 5 tanesi yerine koyularak rasgele olarak seçildiğinde,

1. Hepsinin de ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
2. Sadece 2'sinin ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
3. En az 4'ünün ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
4. En fazla 2'sini ambalajının istenilen standarda uygun olması olasılığı nedir?
5. Ambalajı istenilen standarda uygun olması beklenen ilaç paketi sayısı nedir?

Binom Dağılımı

Örnek;

$X(n = 5, p = 0.90)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n$$

Binom Dağılımı

Örnek;

1-) $P(X=5) = \binom{5}{5}(0.90)^5(0.90)^{5-5} = \frac{5!}{5!(5-5)!}(0.90)^5 = 0.59049$

Binom Dağılımı

Örnek;

2-) $P(X=2) = \binom{5}{2}(0.9)^2(0.1)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!}(0.9)^2(0.1)^3 = 0.0081$

Binom Dağılımı

Örnek;

3-)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 4) = P(X =) + P(X = 5) \\
&= \binom{5}{4}(0.9)^4(0.1)^1 + \binom{5}{5}(0.9)^5(0.1)^0 \\
&= \frac{5!}{4!1!}(0.9)^4(0.1)^1 + \frac{5!}{5!0!}(0.9)^5(0.1)^0 \\
&= 0.32805 + 0.59049 \\
&= 0.91854
\end{aligned}
$$

Binom Dağılımı

Örnek;

4-)

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\
&= \binom{5}{0}(0.9)^0(0.1)^5 + \binom{5}{1}(0.9)^1(0.1)^4 + \binom{5}{2}(0.9)^2(0.1)^3 \\
&= 0.00001 + 0.00045 + 0.0081 \\
&= 0.00856
\end{aligned}
$$

Binom Dağılımı

Örnek;

4-) $\mu = E(X) = np = 5(0.90) = 4.5$

Poisson Dağılımı

Bu dağılım, belirli bir aralıkta gerçekleşme olasılığının çok küçük olduğu durumlarda kullanılır. Örneğin Ankara'da Beşevler kavşağında bir gün içerisinde meydana gelen trafik kazaları, belli bir yılda meydana gelen doğal afetler, az rastlanan hastalıklar gibi.

Denek sayısı olan n büyük iken p de çok küçük ise binom dağılımı poisson dağılımına yaklaşır. Genel olarak $np \leq 5$ olduğu zaman binom dağılımı yerine poisson dağılımı kullanılabilir. Ayrıca n'nin 20 den büyük olması koşulu vardır.

Poisson Dağılımı

Poisson Dağılımı;

X rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse, bu değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, \ldots$$

λ gerçekleşen ortalama olay sayısı olup $\lambda = np$'dir.

Poisson Dağılımı

Poisson dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir;

- $\mu = E(X) = \lambda$
- $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

Poisson Dağılımı

Örnek;

Bir şehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta içinde ortalama ölen kişi sayısı 4’ dür. Belli bir hafta içinde bu hastalıktan,

1. Hiç kimsenin ölmemesi
2. En az 2 kişinin ölmesi
3. 3 kişinin ölmesi

olasılıklarını hesaplayınız.

Poisson Dağılımı

Örnek;

X: bir haftada bu hastalıktan ölenlerin sayısı

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots \qquad \lambda = 4$$

Poisson Dağılımı

Örnek;

1-)

$$P(X=0)=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=0.0183$$

Poisson Dağılımı

Örnek;

2-)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) & \\
&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\
&= 1 - (\frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!}) \\
&= 1 - (0.0183 + 0.0733) \\
&= 1 - 0916 \\
&= 0.9084
\end{aligned}
$$

Poisson Dağılımı

Örnek;

3-)

$$P(X=3)=\frac{e^{-4}4^{3}}{3!}=0.195$$

Geometrik Dağılımı

Geometrik Dağılımı;

Arka arkaya n kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde ilk istenen sonucun (başarı ya da başarısızlık) elde edilmesi için yapılan deney sayısı olan X'e geometrik rasgele değişken denir. Bu değişkenin dağılımı geometrik dağılım adını alır.

X rasgele değişkeni geometrik dağılıma sahipse, $X \sim Geo(p)$ biçiminde gösterilir.

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \ldots \qquad 0 < p < 1$$

Geometrik Dağılımı

Geometrik dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibidir;

- $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$
- $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Geometrik Dağılımı

Örnek;

Bir torbada 8 beyaz, 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.

1. Beyaz topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
2. X rasgele değişkeni beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı ise X rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı nedir?

Geometrik Dağılımı

Örnek;

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deney sayısı

$X(p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3})$

$f(x) = P(X = x) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \ldots$

Geometrik Dağılımı

Örnek;

1-) $P(X = 5) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} = \frac{2}{243}$

Geometrik Dağılımı

Örnek;

2-) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$

$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-2/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$

Ödevler

Ödev 1- Binom Dağılımı;

Belli bir ameliyatın başarılı sonuçlanması olasılığı %80'dir. Ameliyat edilen 10 hastadan,

1. 6' sının iyileşmesi olasılığı nedir?
2. En az 9' unun iyileşmesi olasılığı nedir?
3. En fazla 7' sinin iyileşmesi olasılığı nedir?
4. Ameliyatı başarılı sonuçlanacak hastaların beklenen sayısını ve varyansını hesaplayınız

Ödevler

Ödev 2-Poisson Dağılımı;

Bir ülkedeki her 100000 ölüm vakasında ortalama 3 tanesi COVID-19'dan ortaya çıkmaktadır. Belirli bir zaman dilimindeki 200000 ölüm vakasında COVID-19'dan dolayı,

1. Sıfır ölüm vakasına,
2. 6 ölüm vakasına,
3. 6,7 ya da 8 ölüm vakasına,

rastlama olasılıklarını hesaplayınız.

Ödevler

Ödev 3-Geometrik Dağılım;

Bir sınıfta sigara içen öğrenci olma olasılığı 0.40’ dır.

Devam çizelgesinde ismi belirlenen öğrenciye sigara içip içmediği soruluyor.

4’ üncü sırada sorulan öğrencinin ilk sigara içen öğrenci olma olasılığı nedir?

12. Hafta: Normal Dağılım

Kaynaklar I

[1] K. Mert Çubukçu,
"Planlamada ve Coğrafyada Temel İstatistik ve Mekansal İstatistik",
Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eği. Dan. Tic. Ltd. Şti., (2015).

[2] A. Özmen, F. Er, M. Atlas, E. Şıklar,
"İstatistik (AÖF)",
Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, (2012).

[3] L. İşbilen Yücel,
"İstatistik Maliye Uzaktan Eğitim",
İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi Ders Notu.

[4] Ö. Serper,
"Uygulamalı İstatistik 1",
Bursa: Ezgi Kitapevi, (2004).

Kaynaklar II

[5] Murat Komisyon,
"İstatistik",
Murat Açıköğretim Yayınları, (2004).

[6] N. Gürsakal, A. Oğuzlar,
"Betimsel İstatistik",
Dora Yayıncılık, (2019).

[7] Y. Baykul, C. O. Güzeller,
"Sosyal Bilimler için İstatistik Uygulamaları",
Ankara: Pegem Akademi, (2014).

[8] Ankara Üniversitesi Açık Ders Sunumları,
"AKT102 İSTATİSTİK, BÖLÜM 3 OLASILIK",
https://acikders.ankara.edu.tr